Ifilbert spaces contractively included in the Hardy space of the bidisk

Alpay, Daniel; Bolotnikov, Vladimir; Dijksma, Aad; Rovnyak, James; Sadosky, Cora

Published in:
Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Serie 1: Mathématique

Publication date:
1998

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, p. 1365-1370, 1998
Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Espaces de Hilbert inclus contractivement dans l'espace de Hardy du bi-disque

Daniel ALPAY [a], **Vladimir BOLOTNIKOV** [a], **Aad DIJKSMA** [b], **James ROVNYAK** [c], (1), **Cora SADOSKY** [d], (2)

[a] Département de mathématiques, Université Ben-Gurion du Negev, POB 653, 84105 Beer-Sheva, Israel
Courriel : dany@cs.bgu.ac.il, vladi@cs.bgu.ac.il

[b] Département de mathématiques, Université de Groningue, POB 800, 9700 AV Groningue, Pays-Bas
Courriel : dijksma@math.rug.nl

[c] Département de mathématiques, Université de Virginia, Charlottesville, VA 22903-3199, États-Unis
Courriel : rovnyak@Virginia.EDU

[d] Département de mathématiques, Howard University, Washington, DC 20059, États-Unis
Courriel : cs@scs.howard.edu

(Reçu le 12 mai 1998, accepté le 25 mai 1998)

Résumé. Les espaces à noyau reproduisant dont le noyau est de la forme (3) n'ont pas une généralisation immédiate au cas de plusieurs variables. Nous proposons une définition dans le cas de deux variables et esquissons la théorie correspondante. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Hilbert spaces contractively included in the Hardy space of the bidisk

Abstract. *Reproducing kernel Hilbert space whose reproducing kernels are of the form* (3) *do not have an immediate generalization to the case of several variables. We propose a definition in the case of two variables and outline the corresponding theory.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

Let $\mathcal{G}$ be a Hilbert space, and let $\mathbf{H}_2(\mathcal{G})$ be the Hardy space of $\mathcal{G}$-valued functions $g(z) = \sum_0^\infty g_n z^n$, $z \in \mathbb{D}$, with $g_n \in \mathcal{G}$ and norm $\|g\|^2_{\mathbf{H}_2(\mathcal{G})} = \sum_0^\infty \|g_n\|^2_{\mathcal{G}}$. The space $\mathbf{H}_2(\mathcal{G})$ has reproducing kernel $\frac{I_\mathcal{G}}{1-zw^*}$. A reproducing kernel Hilbert space $\mathcal{M}$ of analytic $\mathcal{G}$-valued functions on $\mathbb{D}$ is contractively included in $\mathbf{H}_2(\mathcal{G})$, invariant under the backward shift $R_0 f(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$, and satisfies the inequality (2) if and only if its reproducing kernel is of the form (3), where S is analytic in the open unit disk $\mathbb{D}$ and has values which are contractive operators from a Hilbert space $\mathcal{F}$ into

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

$\mathcal{G}$. These spaces were introduced by de Branges and Rovnyak [4]. They play an important role in operator theory; in particular, they provide the state space for a coisometric realization of S (*see* (4)). They will be denoted by the symbol $\mathcal{H}(S)$ in the sequel. $\mathcal{H}(S)$ spaces admit various extensions to such different settings as function theory on a Riemann surface, the theory of upper-triangular operators and the theory of functions in indefinite inner product spaces (*see* [6], [4], [5], [2]).

We are interested in the passage from one variable to two and more. It is far from being trivial and has been considered by different authors (*see* e.g. [1], [8]). We present in this Note a new approach to the case of two variables. Following Sarason's definition in one variable [13], we introduce:

DEFINITION 1. – A sub-Hardy Hilbert space of the bidisk is a Hilbert space contractively included in the Hardy space of the bidisk

$$\mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2,\mathcal{G}) = \left\{ G(z_1,z_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} G_{ij} z_1^i z_2^j \mid z_i \in \mathbb{D},\ G_{ij} \in \mathcal{G},\ \sum_{i,j=0}^{\infty} \|G_{ij}\|_{\mathcal{G}}^2 < \infty \right\},$$

which is invariant under the 2-variable analogue $R_0^{(2)}$ of the operator R_0 defined by (6), and satisfies the inequality (7) (which is one of the 2-variable analogues of (2)).

Note that (6) is one of the 2-variable analogues of (2). To obtain a more symmetric definition in z_1 and z_2, one could also ask that the space be invariant under $R_0^{(1)}$ defined by (6) and satisfies (8). This is done in the work on which this Note is based. The present definition is given to ease and shorten the presentation.

This family of spaces contains the class of reproducing kernel spaces with reproducing kernel:

$$\frac{I - S(z_1,z_2)S(\omega_1,\omega_2)^*}{(1-z_1\omega_1^*)(1-z_2\omega_2^*)}, \tag{1}$$

where $S : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbf{L}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ is contractive and analytic (a Schur function of the bidisk). The main point here is that the inclusion is strict; there are new types of spaces that have to be considered: see Example 2 in the French part. The case of finite-dimensional spaces is of much importance and has applications in invariant subspace theory.

---

1. Le cas d'une variable

Soit $\mathcal{M}$ un espace de Hilbert à noyau reproduisant de fonctions analytiques de $\mathbb{D}$ dans $\mathcal{G}$ (où $\mathbb{D}$ désigne le disque et $\mathcal{G}$ un espace de Hilbert). L'espace $\mathcal{M}$ est inclus contractivement dans l'espace de Hardy $\mathbf{H}_2(\mathcal{G})$ (cet espace ainsi que les notations non expliquées dans la partie française de cette Note sont définis dans la partie anglaise), invariant par l'opérateur de déplacement à gauche $R_0 f(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$ et satisfait l'inégalité

$$\|R_0 f\|_{\mathcal{M}}^2 \leq \|f\|_{\mathcal{M}}^2 - \|f(0)\|_{\mathcal{G}}^2 \tag{2}$$

si et seulement si son noyau reproduisant est de la forme :

$$\frac{I_{\mathcal{G}} - S(z)S(\omega)^*}{1-z\omega^*}, \tag{3}$$

où S est une fonction de Schur (c'est-à-dire analytique et contractive dans $\mathbb{D}$), à valeurs dans $\mathbf{L}(\mathcal{F},\mathcal{G})$, où $\mathcal{F}$ est un espace de Hilbert (*voir* [4], Theorem 3.1.2, p. 85, pour un énoncé et une preuve dans le cadre des espaces de Pontryagin). Les espaces $\mathcal{H}(S)$ associés aux fonctions (3) jouent un rôle important en théorie de l'interpolation et des modèles d'opérateurs. En particulier, ils sont espaces d'état d'une réalisation co-isométrique de S :

$$S(z) = D + zC(I - zA)^{-1}B, \tag{4}$$

où $A = R_0$, $D = S(0)$, C est l'opérateur d'évaluation à 0 et $B : \mathcal{F} \to \mathcal{H}(S)$ est l'opérateur défini par $(Bf)(z) = (R_0 Sf)(z)$, et la matrice d'opérateurs $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ définit une co-isométrie de $\mathcal{H}(S) \oplus \mathcal{F}$ dans $\mathcal{H}(S) \oplus \mathcal{G}$ (*voir* [9]). Rappelons aussi la caractérisation suivante, due à de Branges et Rovnyak et pour une démonstration de laquelle nous renvoyons à Andô [7] :

$$\mathcal{H}(S) = \left\{ G \in \mathbf{H}_2(\mathcal{G}) \mid \sup_{U \in \mathbf{H}_2(\mathcal{F})} \left(\|G + SU\|^2_{\mathbf{H}_2(\mathcal{G})} - \|U\|^2_{\mathbf{H}_2(\mathcal{F})} \right) < \infty \right\}, \tag{5}$$

et le supremum est le carré de la norme dans $\mathcal{H}(S)$.

2. Le cas de deux variables

Lorsque l'on remplace le disque par le bi-disque $\mathbb{D}^2$, il y a deux opérateurs de déplacement à gauche, à savoir :

$$R_0^{(1)} f(z_1, z_2) = \frac{f(z_1, z_2) - f(0, z_2)}{z_1} \quad \text{et} \quad R_0^{(2)} f(z_1, z_2) = \frac{f(z_1, z_2) - f(z_1, 0)}{z_2}. \tag{6}$$

L'objet de cette Note est d'étudier les espaces à noyau reproduisant $\mathcal{M}$ contractivement inclus dans l'espace de Hardy du bi-disque $\mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2, \mathcal{G})$, invariants par les opérateurs (6) et satisfaisant les inégalités correspondantes à (2), à savoir :

$$\|R_0^{(2)} f\|^2_{\mathcal{M}} \le \|f\|^2_{\mathcal{M}} - \|f(z_1, 0)\|^2_{\mathbf{H}_2(\mathcal{G})}, \tag{7}$$

et

$$\|R_0^{(1)} f\|^2_{\mathcal{M}} \le \|f\|^2_{\mathcal{M}} - \|f(0, z_2)\|^2_{\mathbf{H}_2(\mathcal{G})}. \tag{8}$$

Les espaces à noyau reproduisant dont le noyau reproduisant est de la forme (1) ont ces propriétés. Contrairement au cas d'une variable, il y a d'autres espaces avec ces mêmes propriétés.

Exemple 2. – Soient a_1, $a_2 \in \mathbb{D}$. Le sous-espace $\mathcal{M}$ de dimension 1 de $\mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2)$ engendré par la fonction

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(1 - z_1 a_1^*)(1 - z_2 a_2^*)}$$

est invariant par les opérateurs (6). Il satisfait (7) et (8) (avec égalité). Il n'existe pas de fonctions de Schur (même à valeurs opérateurs) tel que le noyau reproduisant de $\mathcal{M}$ soit de la forme (1).

3. Caractérisation des sous-espaces de Hardy du bi-disque

Rappelons les notations utilisées dans [3] pour étudier l'interpolation dans l'espace de Hardy du bi-disque. Soit $G(z_1, z_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} G_{ij} z_1^i z_2^j \in \mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2, \mathcal{G})$, et soit $g_i(z_2) = \sum_{j=0}^{\infty} G_{ij} z_2^j$. La fonction

$$g(z_2) = \begin{pmatrix} g_0(z_2) \\ g_1(z_2) \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{9}$$

appartient à $\mathbf{H}_2(\mathbb{D}, \ell_2(\mathcal{G}))$ et satisfait :

$$G(z_1, z_2) = E(z_1)g(z_2) \tag{10}$$

avec $E : \mathbb{D} \to \mathbf{L}(\ell_2(\mathcal{G}), \mathcal{G})$ défini par :

$$E(z) = \left(I_{\mathcal{G}}, zI_{\mathcal{G}}, z^2 I_{\mathcal{G}}, \ldots\right). \tag{11}$$

De plus, $\|G\|_{\mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2, \mathcal{G})} = \|g\|_{\mathbf{H}_2(\mathbb{D}, \ell_2(\mathcal{G}))}$.

THÉORÈME 3. – *Soit $\mathcal{G}$ un espace de Hilbert et soit $\mathcal{M}$ un espace de Hilbert de fonctions analytiques dans $\mathbb{D}^2$ et à valeurs dans $\mathcal{G}$. Supposons $\mathcal{M}$ contractivement inclus dans $\mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2, \mathcal{G})$, invariant sous l'action de l'opérateur $R_0^{(2)}$ et tel que l'inégalité* (8) *ait lieu. Le noyau reproduisant de $\mathcal{M}$ est alors de la forme :*

$$K_{\mathcal{M}}(z_1, z_2, \omega_1, \omega_2) = E(z_1) \frac{I - S_2(z_2)S_2(\omega_2)^*}{1 - z_2\omega_2^*} E(\omega_1)^* \tag{12}$$

sur $\ell_2(\mathcal{G})$ (c'est-à-dire, S_2 est une fonction de Schur à valeurs opérateurs de $\ell_2(\mathcal{G})$ dans lui-même). Réciproquement, un espace à noyau reproduisant dont le noyau reproduisant est de la forme (12) *est inclus contractivement dans $\mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2, \mathcal{G})$, invariant par $R_0^{(2)}$ et satisfait l'inégalité* (8).

Soit, comme dans (10), $G(z_1, z_2) = E(z_1)g(z_2) \in \mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2, \mathcal{G})$, avec $g \in \mathbf{H}_2(\mathbb{D}, \ell_2(\mathcal{G}))$. La formule

$$\mathbf{S_2} E(z_1)g(z_2) = E(z_1)S_2(z_2)g(z_2) \tag{13}$$

définit un opérateur borné de $\mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2, \ell_2(\mathcal{G}))$ dans lui-même. Cela nous permet d'obtenir la caractérisation suivante de l'espace $\mathcal{M}$. Dans la preuve, nous utilisons des résultats de Andô [7].

PROPOSITION 4. – *L'espace $\mathcal{M}$ de noyau reproduisant* (12) *est l'image d'opérateur*

$$\operatorname{ran}\,(I - \mathbf{S_2}\mathbf{S_2}^*)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

avec la norme de l'image. De manière équivalente,

$$\mathcal{M} = \left\{G \in \mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2, \mathcal{G}) \mid \sup_{U \in \mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2, \mathcal{G})} \left(\|G + \mathbf{S}_2 U\|^2_{\mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2, \mathcal{G})} - \|U\|^2_{\mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2, \mathcal{G})}\right) < \infty\right\}, \tag{15}$$

et la norme de $G \in \mathcal{M}$ est le supremum dans (15).

Bien sûr, (15) est l'analogue de (5).

Dans les résultats précédents nous avons considéré l'opérateur $R_0^{(2)}$. Le résultat suivant considère le cas où l'on suppose de plus l'invariance de $\mathcal{M}$ par $R_0^{(1)}$.

THÉORÈME 5. – *Avec les notations et les hypothèses du théorème* 3, *soit T l'opérateur de déplacement sur $\ell_2(\mathcal{G})$ défini par la matrice*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathcal{G}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{G}} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{16}$$

L'espace $\mathcal{M}$ est $R_0^{(1)}$-invariant si et seulement si la fonction $z \mapsto T(f(z)) \in \mathcal{H}(S_2)$ pour tout $f \in \mathcal{H}(S_2)$.

4. La réalisation co-isométrique

L'équation (4) est donnée dans le théorème suivant :

THÉORÈME 6. – *Soient $\mathcal{M}$ et S_2 comme dans le théorème 3. Soient A_2, B_2, C_2 et D_2 les opérateurs définissant la réalisation co-isométrique dans $\mathcal{H}(S_2)$. Soient, pour tout choix de $u \in \mathbf{H}_2(\mathcal{G})$ et $\xi \in \mathcal{F}$, les opérateurs $\mathbf{A_2}, \mathbf{B_2}, \mathbf{C_2}$ et $\mathbf{D_2}$ définis par :*

$$\mathbf{A}_2 E(z_1)u(z_2) = E(z_1)(A_2 u)(z_2), \tag{17}$$
$$\mathbf{B}_2 E(z_1)\xi = E(z_1)(B_2\xi)(z_2), \tag{18}$$
$$\mathbf{C}_2 E(z_1)u(z_2) = E(z_1)(C_2 u), \tag{19}$$
$$\mathbf{D}_2 E(z_1)\xi = E(z_1)D_2\xi. \tag{20}$$

La matrice d'opérateurs

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A_2} & \mathbf{B_2} \\ \mathbf{C_2} & \mathbf{D_2} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{M} \\ \mathbf{H}_2(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{M} \\ \mathbf{H}_2(\mathcal{G}) \end{pmatrix}$$

est co-isométrique et

$$(\mathbf{S}_2(E_1(z_1)\xi))(z_2) = \big(\mathbf{D}_2 + z_2\mathbf{C}_2(I - z_2\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2\big)(E_1(z_1)\xi). \tag{21}$$

Dans le cas où l'espace $\mathcal{M}$ est un espace à noyau reproduisant de noyau (1), nous avons :

THÉORÈME 7. – *Soit S une fonction de Schur à valeurs dans $\mathbf{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ et telle que le noyau (1) est positif. Avec la notation du théorème précédent,*

$$S(z_1, z_2)f_1 = \left(\mathbf{S}_2\begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}\right)(z_1, z_2) = \big(\mathbf{D}_2 + z_2\mathbf{C}_2(I - z_2\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2\big)f_1. \tag{22}$$

5. Le cas de dimension finie

Les espaces de la forme (15) de dimension finie sont d'une importance particulière. Ce sont des analogues en deux variables des espaces de la forme $\mathbf{H}_2 \ominus B\mathbf{H}_2$, où B est un produit de Blaschke matriciel de degré fini. Comme dans le cas d'une variable, ils jouent un rôle en théorie de l'interpolation (*voir* [3], où ils apparaissent de manière implicite). Le fait qu'une fonction analytique de deux variables n'a pas de zéros isolés permet de conclure qu'il n'y a pas d'espace $\mathcal{M}$ de dimension finie avec noyau reproduisant (1) avec S carrée matricielle à valeurs dans $\mathbb{C}^{p\times p}$ de déterminant identiquement nul mais possédant des zéros. En effet, soient $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{D}^2$ et $\xi \neq 0 \in \mathbb{C}^p$ tels que $S(\omega_1, \omega_2)\xi = 0$. La fonction $\frac{\xi}{(1-z_1\omega_1^*)(1-z_2\omega_2^*)}$ appartient alors à $\mathcal{M}$; ces différentes fonctions sont linéairement indépendantes. Nous renvoyons à [10] pour d'autres résultats sur les analogues des espaces $\mathbf{H}_2 \ominus B\mathbf{H}_2$ dans le polydisque.

6. Sous-espaces invariants

Les méthodes de travail, et la section précédente en particulier permettent aussi d'étudier certains sous-espaces invariants du polydisque.

THÉORÈME 8. – *Soient $p_1, \ldots, p_N \in \mathbb{D}^2$. Il n'existe pas de fonction analytique S à valeurs dans $\mathbb{C}^{p\times q}$ et isométriques sur $\mathbb{T}^2$ telle que :*

$$\{G \in \mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2, \mathbb{C}^p) \mid G(p_i) = 0,\ i = 1, \ldots N\} = S\mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2, \mathbb{C}^q). \tag{23}$$

Le complément orthogonal dans $\mathbf{H}_2(\mathbb{D}^2, \mathbb{C})$ de l'espace défini en (23) est un exemple de sous-espace de dimension finie invariant pour les opérateurs $R_0^{(1)}$ et $R_0^{(2)}$ et satisfaisant, avec égalité, les inégalités (7) et (8).

(*Voir* [10] et [11] pour des résultats sur les sous-espaces invariants par les opérateurs de multiplication par z_1 et z_2.)

7. Conclusion

L'idée de ramener l'étude de deux variables à une variable en considérant des fonctions à valeurs vectorielles n'est pas nouvelle (*voir* par exemple [12]) ; cependant, notre approche permet d'aborder les points suivants, qui nous paraissent nouveaux :

1. une caractérisation des espaces considérés en tant qu'images d'opérateurs positifs ;
2. la théorie d'espaces de dimension finie, qui généralisent les compléments orthogonaux des espaces de Beurling–Lax ;
3. une théorie de la réalisation co-isométrique pour une fonction analytique et contractive dans le bi-disque.

Notre approche permet aussi d'étudier le cas où nous quittons l'espace de Hardy du bi-disque et autorisons des carrés négatifs pour le noyau associé à S_2 (comme dans [4], par exemple). On obtient alors des espaces de Krein d'un nouveau type.

---

(1) Recherche financée en partie par la National Science Foundation (USA).

(2) Recherche financée en partie par le Department of Energy (USA).

Références bibliographiques

[1] Agler J., On the representation of certain holomorphic functions defined on a polydisk, Vol. 48 of, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990, pp. 47–66.

[2] Alpay D., Algorithme de Schur, espaces à noyau reproduisant et théorie des systèmes, Preprint, 1998. To appear in the series Panoramas et Synthèses (Société Mathématique de France).

[3] Alpay D., Bolotnikov V., Interpolation in the Hardy space of the bidisk, Accepted in Proc. Amer. Math. Soc. (1998).

[4] Alpay D., Dijksma A., Rovnyak J., de Snoo H., Schur functions, operator colligations, and reproducing kernel Pontryagin spaces, Vol. 96 of, Operator theory: Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[5] Alpay D., Peretz Y., Special realizations for Schur upper triangular operators, Preprint 1998. To appear in the series Operator Theory: Advances and Applications, 1997.

[6] Alpay D., Vinnikov V., Analogues d'espaces de de Branges sur des surfaces de Riemann, C. R. Acad. Sci. Paris 318 Série I (1994) 1077–1082.

[7] Andô T., de Branges spaces and analytic operator functions, Lecture Notes, Hokkaido University, Sapporo, 1990.

[8] Ball J., Trent T., Unitary colligations, reproducing kernel Hilbert spaces and Nevanlinna–Pick interpolation in several variables, Preprint, 1996.

[9] Branges L. de, Rovnyak J., Square summable power series, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[10] Cotlar M., Sadosky C., Two distinguished subspaces of product BMO and Nehari– Adamjan–Arov–Kreĭn theory for Hankel operators on the torus, Integ. Eq. Oper. Th. 26 (1996) 273–304.

[11] Cotlar M., Sadosky C., A polydisk version of Beurling's characterization for invariant subspaces of finite multi-codimension, Contemp. Math. 212 (1998) 51–56.

[12] Radlow J., Ideals of square summable power series in several variables, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973) 293–297.

[13] Sarason D., Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk, Vol. 10 of, University of Arkansas Lect. Notes in the Math. Sci., Wiley, New York, 1994.